استفاده از دوجمله‌ای نیوتن در توزیع برنولی

ضیاألدین ضیاء*[1] جمعه خان پژمان*[2]

۱- پوهنمل، ریاضی، تعلیم و تربیه، پوهنتون غور، فیروزکوه افغانستان (نویسنده مسئول)
ziauddin.zia@ghru.edu.af

۲- پوهندوی، ریاضی، تعلیم و تربیه، پوهنتون غور، فیروز کوه افغانستان.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۴/۱۰ – تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۶ – تاریخ نشر: ۱۴۰۴/۱۰/۹

چکیده

استفاده از دوجمله‌ای نیوتن در توزیع برنولی در بخش‌های مختلف علوم کاربردهای زیاد دارد و از توسعه ضرایب سطرهای دوجمله‌ای نیوتن شکل یک مثلث تشکیل می‌شود درحالی‌که این مثلث هندسی نیست عددی است. که مانند بسیاری از جدول‌های عددی دیگر پیشینه‌ی تاریخی دارد. هم‌چنین از مجموع ضرایب سطرهای بسط دوجمله‌ای نیوتن یک تصاعد متزاید و مضاعف ساخته می‌شود. که در این مقاله به بررسی این موضوع پرداخته می‌شود و فرمول توزیع دوجمله‌ای را همراه با مثال برای درک بهتر ارائه خواهیم کرد. یکی از ساده‌ترین و درعین‌حال مهم‌ترین انواع توزیع، توزیع برنولی است. در اینجا ما در مورد توزیع برنولی و استفاده دوجمله‌ای نیوتن در توزیع برنولی توضیحات ارائه خواهیم کرد و مفروضات اساسی توزیع دوجمله‌ای این است که برای هر کار آزمایشی فقط یک نتیجه وجود دارد و هر آزمایشی احتمال موفقیت یکسانی دارد. هم‌چنان هر آزمایشی مستقل از یکدیگر است و توزیع دوجمله‌ای یک توزیع گسسته رایج است که در احصائیه و احتمالات استفاده می‌شود و از ضرایب بسط دوجمله‌ای نیوتن یک مثلث تشکیل می‌شود.

کلمات کلیدی: دوجمله‌ای نیوتن، توزیع برنولی، ضرایب مثلث، آزمایش تصادفی.

استناد: ضیاء، ضیاءالدین و پژمان، جمعه خان. (۱۴۰۴). استفاده از دوجمله‌ای نیوتن در توزیع برنولی. *مجله علمی- پوهنتون غور*، ۲(۱)، ۲۳۷-۲۵۷.

Use Newton binomial in Bernoulli distribution

ziauddin.zia*[1] Juma Khan Pajman*[2]

1- Asst. Prof, Mathematics, Education,Ghor Institute of Higher Education Firouz Koh Afghanistan (Corresponding Author) ziauddin.zia@ghru.edu.af

2- Asst. Prof, Mathematics, Education,Ghor Institute of Higher Education Firouz Koh Afghanistan (Corresponding Author) ziauddin.zia@ghru.edu.af

Received: 1/9/2025 | Accepted: 28/10/2025 | Published: 30/12/2025

Abstract

The use of Newton's binomial in the Bernoulli distribution has many applications in various fields of science. The shape of a triangle is formed from the expansion of the coefficients of Newton's binomial rows, while this triangle is not geometric, it is a number that, like many other numerical tables, has a historical background. Also, from the sum of coefficients of the rows of Newton's binomial expansion, an incremental and double expansion is made, which is discussed in this article, and we will present the binomial distribution formula along with an example for better understanding. It is one of the simplest and in at the same time, the most important type of distribution is the Bernoulli distribution. Here we will explain about the Bernoulli distribution and the use of Newton's binomial in the Bernoulli distribution. The basic assumptions of the binomial distribution are that there is only one outcome for each experimental task, each experiment has the same probability of success, and each experiment is independent of each other. Binomial distribution is a common discrete distribution that is used in statistics and probabilities. It is formed by Newton's binomial expansion coefficients of a triangle, this triangle is a numerical triangle that, like many other numerical tables, has a long historical background.

Keywords: Newton's binomial, Bernoulli distribution, triangle coefficients and random experiment.

Cite: zia, Z.,& Pazhman, J . (2025). Use Newton binomial in Bernoulli distribution. *Scientific Journal of Ghor University, 2*(1), 237-257.

مقدمه

علم ریاضیات بیهوده به نام ملکه علوم نیست این مبنای فزیک، کیمیا، محیطزیست و اقتصاد است و در هر یک از این علوم کاربرد زیاد دارد و استفاده از نتایج علمی و عملی آن موردتوجه این بحث است. مقاله هذا در راستای جستجوی کاربرد و استفاده از دوجمله‌ای نیوتن در توزیع برنولی به روش‌های مختلف و گوناگون علمی در مقایسه با سایر روش‌های معروف و شناخته‌شده‌ای علمی است. تحقیقات در مورداستفاده دوجمله‌ای و توزیع برنولی از همان اوایل و شروع مراحل خود موردتوجه دانشمندان زیادی قرار گرفت و امروزه در بخش‌های مختلف زندگی روزمره از آن به‌صورت گسترده استفاده می‌شود. توزیع دوجمله‌ای، یکی از بخش‌های اصلی ریاضی است که تمام آمار ریاضی و نظریه احتمال مبتنی بر آن است. توزیع دوجمله‌ای نوعی توزیع پرکاربرد در آمار، اقتصاد و علوم تجربی است و مفروضات اساسی توزیع دوجمله‌ای این است که برای هر کار آزمایشی فقط یک نتیجه وجود دارد و هر آزمایش احتمال موفقیت یکسان دارد. در توزیع برنولی که مقادیر یک (در صورت موفقیت آزمایش) و صفر را (در صورت شکست) می‌گیرد. یک آزمایش دوجمله‌ای باید دارای n تعداد آزمایش یکسان و عیناً مشابه باشد و نتیجه هر آزمایش فقط به یکی از این دو صورت باشد (موفقیت یا شکست). یکی از مباحث قابل‌طرح و جستجو در زمینه‌های مختلف حل مسایل گوناگون علمی و تکنالوژی عصر امروزی توزیع احتمال برنولی و دوجمله‌ای مطرح بوده و جایگزین پیش‌بینی فعالیت‌ها در عرصه‌های مختلف بوده و از اهمیت خاص برخوردار می‌باشد. لهذا در مورداستفاده از دوجمله‌ای نیوتن در توزیع برنولی پرداخته می‌شود. (تبریزی, ۱۳۸۹).

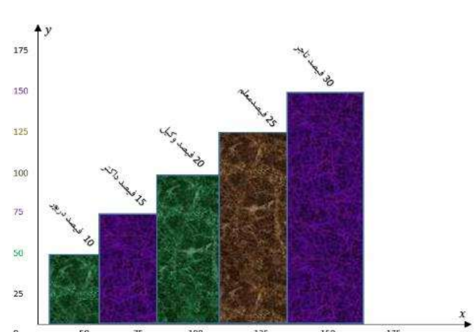
۲- **پیشینه تحقیق:** قبل از این هم دانشمندان زیادی در مورد دوجمله‌ای نیوتن و توزیع برنولی کارهای زیاد انجام داده‌اند. نخستین آزمایش‌ها را دانشمندان ایتالیایی درباره بازی با تاس نوشتند. برنولی کتاب روش حدس زدن را نوشت و قانون عددهای بزرگ را کشف کرد. در سده هجدهم و ابتدای سده نوزدهم نظریه احتمال در دانش‌های طبیعی و صنعت به‌طورجدی کاربرد پیدا کرد. از ترتیب ضرایب توسعه دوجمله‌ای نیوتن شکل یک مثلث تشکیل می‌شود و این مثلث هندسی نیست عددی است. نخستین ریشه‌های این مثلث را می‌توان در مطالعات هندی‌ها در ترکیبات و مطالعات یونانی‌ها درباره‌ی اعداد مصور جستجو کرد. تقریباً هم‌زمان با

هندی‌ها، ریاضی‌دان ایرانی (کرجی) درباره‌ی این مثلث سخن به میان آورده. مشابه این روش‌ها بعدها توسط نیوتن نیز مطرح شد و اکنون به دستور نیوتن شناخته می‌شود. در خواص ضرایب بسط دوجمله‌ای نیوتن یک‌چیزی دیگر که توجه من را زیاد به‌خود جلب کرد و دراین‌باره کدام کتاب، مقاله و موضوع مشخص بیان‌نشده و یا کم‌تر به چشم می‌خورد این است که به ترتیب از مجموع ضرایب سطرهای بسط دوجمله‌ای نیوتن یک تصاعد متزاید و مضاعف ساخته می‌شود. چنانچه دیده می‌شود مجموع ضرایب سطر اول(۱) از سطر دوم(۲) به همین ترتیب از بالا به‌طرف پایین در سطر سوم (۴) در سطر چهارم (۸) در سطر پنجم(۱۶) در سطر ششم(۳۲) و... که این روش ساخت‌وساز تصاعد متزاید و مضاعف توسط مجموع ضرایب سطرهای بسط دوجمله‌ای نیوتن تا لایتناهی ادامه دارد. موارد استفاده از دوجمله‌ای نیوتن در توزیع برنولی در این است که مجموع ضرایب سطرهای بینومیل $(a+b)^n$ در بسط دوجمله‌ای نیوتن و مجموع عناصر فضای نمونه در یک تجربه تصادفی توزیع برنولی باهم مساوی و برابر اند، چون‌که مجموع عناصر فضای نمونه‌ای توزیع برنولی از رابطه‌ای 2^n به دست می‌آید و مجموع ضرایب دوجمله‌ای نیوتن از رابطه$(a+b)^n$ به دست می‌آید که با گذاشتن هر قیمت n که قیمت‌های مختلف $n = 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، ... \infty$ را به خود می‌گیرد، و هر دو رابطه باهم مساوی می-شوند، چنانچه ما تا سطر سی‌ام (30) مجموع ضرایب بسط دوجمله‌ای نیوتن را محاسبه کردیم بالآخره دریافتیم که مجموع ضرایب سطر سی‌ام آن مساوی شد به (536870912) و این برقراری رابطه‌ای مساوات بین توسعه ضرایب دوجمله‌ای نیوتن و فضای نمونه توزیع برنولی تا لایتناهی ادامه دارد. حال اگر مجموع عناصر فضای نمونه‌ای توزیع برنولی را در یک تجربه تصادفی از رابطه (2^n) که فرمول دریافت محاسبه فضای نمونه برای هر تجربه تصادفی می‌باشد انجام دهیم دیده می‌شود که قیمت عددی آن‌هم (536870912) می‌شود و هر دو رابطه باهم قیمت‌های یکسان دارند، بنابراین دیده می‌شود که واقعاً توسط مجموع ضرایب سطرهای بسط دوجمله‌ای نیوتن و نقاط فضای نمونه تجربه تصادفی توزیع برنولی یک تصاعد متزاید و مضاعف ساخته می‌شود و دارای خواص مشابه و مشترک‌اند. (ناصری, ۱۳۹۴)

۳- روش تحقیق: روش انجام تحقیق بستگی به هدف، ماهیت موضوع تحقیق و امکانات اجرای آن دارد، روش جمع‌آوری معلومات جهت تجزیه‌وتحلیل معلومات متفاوت است، انتخاب

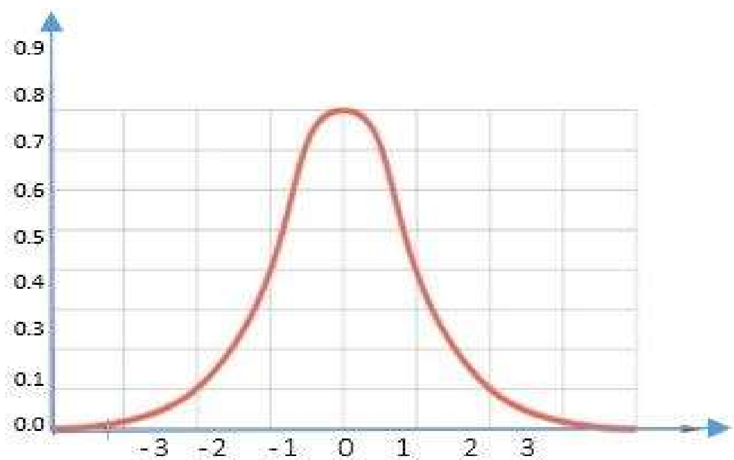
روش تحقیق بر اساس همین عوامل است. ازآنجایی‌که هدف اصلی این تحقیق، استفاده از دوجمله‌ای نیوتن در توزیع برنولی است، روش جمع‌آوری معلومات در این تحقیق به شکل مروری و کتاب‌خانه‌ای بوده و از منابع معتبر علمی، کتب و مقالات علمی استفاده گردیده است.

۴- تعریف توزیع: قبل از این‌که بحث خود را درباره توزیع برنولی و دوجمله‌ای آغاز کنیم اول باید خود توزیع را بشنا سیم که توزیع چیست؟ البته مهم‌ترین کاربرد توزیع در آمار یافت می-شود زیرا تجزیه‌وتحلیل جامع درمجموع داده‌ها وجود دارد. توزیع در بخش آمار تابعی است که مقادیر ممکن برای یک متغیر و تعداد دفعات وقوع آن‌ها در یک مجموعه اطلاعات و معلومات مشخص را نشان می‌دهد و این به شما امکان می‌دهد تا احتمال وقوع برخی از نتایج را محاسبه کنید و درک کنید که چه مقدار تنوع درمجموع داده شما وجود دارد. بیایید تصور کنیم که شما اطلاعات و داده‌های شغلی ۵۰۰ نفر را که در شهر کابل زندگی می‌کنند جمع‌آوری کرده‌اید. نتایج ممکن متفاوت همه عناوین شغلی مختلف درمجموع داده‌ها و معلومات شما هستند. ازآنجایی‌که شغل ماهیت طبقه‌بندی دارد (یعنی عددی نیست)، توزیع مجموع داده شما به شما می‌گوید که چند نفر (یا چند فیصد) از افراد نمونه شما در هر گروه قرار دارند، مثلاً ۳۰ فیصد نمونه تاجر، ۲۵ فیصد معلم، ۲۰ فیصد وکیل، ۱۵ فیصد داکتر و۱۰ فیصد دریور هستند، با این داده‌های عددی، توزیع داده‌ها را از کم‌ترین به بالاترین مقدار مرتب می‌کنند، در این حالت توزیع به‌صورت گراف ارائه می‌شود، سپس چشم آموزش‌دیده می‌تواند به شکل گراف نگاه کند تا در یک نگاه، نحوه توزیع داده‌ها و معلومات را ببیند، مانند شکل زیر که به اساس معلومات شغلی ۵۰۰ نفر شهر کابل توزیع و ترسیم‌شده است. (مشکانی, ۱۳۹۰)



(شکل۱): گراف نمونه‌گیری توزیع شغل ۵۰۰ نفر شهر کابل را به اساس فیصدی‌های تعیین‌شده نشان می‌دهد.

اما یک توزیع به‌اصطلاح نورمال یک منحنی متناظر و زنگوله شکل ایجاد می‌کند. این نشان می‌دهد که بیش‌تر مشاهدات از خوشه داده و معلومات در اطراف مرکز (یعنی مقدار میانگین) جمع می‌شوند و تنها تعداد کمی از مشاهدات بیشتر از میانگین در هر دو جهت دور می‌شوند. توزیع نورمال به نام توزیع گاوسی یا بر اساس شکل نمودار، منحنی زنگ نیز شناخته می‌شود. اساساً یک توزیع نورمال به شما می‌گوید که بیش‌تر مشاهدات (مثلاً ارتفاع) در داخل یا نزدیک به مقدار میانگین (وسطی) قرار می‌گیرند، تنها با چند نقطه پراکنده، مانند شکل و نمودار زیر که از توزیع نورمال پیروی می‌کند. (مشکانی, ۱۳۹۰)



(شکل۲): گراف ساده یک منحنی زنگوله‌ای با توزیع نورمال را نشان می دهد.

۵- توزیع دوجمله‌ای: توزیع دوجمله‌ای، یک پیش آمد رایج است که احتمال وجود داشتن یکی از دو نتیجه را تحت تعداد معینی از پارامترها تعیین می‌کند. به‌عبارت‌دیگر توزیع دوجمله-ای برای متغیر تصادفی x توزیعی است که در آن دو نتیجه احتمالی، یعنی پیروزی و شکست برای تعداد محدودی از آزمایش وجود دار. توزیع دوجمله‌ای یک توزیع احصائیوی و آماری است احتمال این‌که یک مقدار یکی از دو مقدار مستقل را تحت مجموعه پارامترها یا مفروضات معینی بگیرد، خلاصه می‌کند. مفروضات اساسی توزیع دوجمله‌ای این است که برای هر کار آزمایشی فقط یک نتیجه وجود دارد و هر آزمایش احتمال موفقیت یکسانی دارد و هر آزمایش متقابلاً منحصربه‌فرد یا مستقل از یکدیگر است. برای شروع دوجمله‌ای در توزیع دوجمله‌ای که

به معنای عبارت دو است. یکی تعداد موفقیت‌ها و دیگری تعداد تلاش‌ها، هرکدام بدون دیگری بی‌فایده است. توزیع دوجمله‌ای یک توزیع گسسته رایج است که در آمار استفاده می‌شود و برخلاف توزیع پیوسته، مانند توزیع نورمال، به این دلیل است که توزیع دوجمله‌ای با توجه به تعدادی آزمایش دژاطلاعات، تنها دو حالت را به‌حساب می‌آورد که معمولاً به‌صورت ۱ (برای موفقیت) و ۰ (برای شکست) نشان داده می‌شود، بنابراین توزیع دوجمله‌ای احتمال موفقیت x در n آزمایش را نشان می‌دهد، با توجه به‌احتمال موفقیت p برای هر آزمایش، توزیع دوجمله‌ای تعداد آزمایش‌ها یا مشاهدات را خلاصه می‌کند، زمانی که هر آزمایش احتمال یکسان برای دستیابی به یک مقدار خاص دارد، توزیع دوجمله‌ای احتمال مشاهده تعداد مشخصی از نتایج موفقیت‌آمیز را در تعداد مشخصی از آزمایش‌ها تعیین می‌کند، توزیع دوجمله‌ای اغلب در آمار علوم اجتماعی به‌عنوان ساختاری برای مدل‌های متغیرهای نتیجه دوگانه در امور مالی، بانک‌داری و بیمه در میان سایر صنایع استفاده می‌شود، توزیع دوجمله‌ای توزیعی است که در آن یک آزمایش برنولی به‌جای این‌که یک‌بار انجام شود n بار انجام می‌شود مثلاً در پرتاب یک سکه مثل این است که بیاییم یک سکه را ۲۰ بار بی اندازیم و بعد بررسی کنیم چند بار شیر آمده یا چند بار خط آمده، برای بررسی دقیق‌تر این توزیع فرض کنید سکه‌ای داریم که با احتمال p شیر می‌آید که ۱ فرض شده و با احتمال $q = p - 1$ خط می‌آید که ۰ فرض شده این سکه را n بار پرتاب می‌کنیم این متغیر تصادفی را با X نشان می-دهیم، فرض کنید یک متغیر تصادفی دیگری هم داریم که با Y نشان می‌دهیم و مشخص می-کند که تعداد ۱ آمدن‌ها (شیر آمدن‌ها) در n بار پرتاب سکه چقدر است، می‌دانیم که X از توزیع برنولی تابعیت می‌کند و Y از توزیع دوجمله‌ای تابعیت می‌کند، حالا می‌خواهیم احتمال $\mathrm{P(Y = k)}$را محاسبه کنیم، پس داریم:

$$P(Y = k) = C(k, n)(p)^k (1 - p)^{n-k} = P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

توزیع دوجمله‌ای مجموع یک سری آزمایش‌ها برنولی مستقل و یکسان توزیع‌شده است. در آزمایش برنولی، گفته می‌شود که این آزمایش تصادفی است و تنها می‌تواند دو نتیجه ممکن داشته باشد(موفقیت یا شکست). طوری مثال، انداختن سکه به‌عنوان آزمایش برنولی در نظر

گرفته شود، هر آزمایش فقط می‌تواند یکی از دو مقدار (شیر یا خط) را داشته باشد هر موفقیت احتمال یکسان دارد و نتایج یک آزمایش بر نتایج آزمایش دیگر تأثیری ندارد و توزیع برنولی یک مورد خاص از توزیع دوجمله‌ای است. (تبریزی, ۱۳۸۹)

۶- **معیارهای توزیع دوجمله‌ای:** این توزیع احتمال وقوع یک روی‌داد را زمانی که معیار و شرایط خاصی برآورده می‌شود، طراحی می‌کند، توزیع دوجمله‌ای شامل معیارهای زیر است که برای استفاده از فرمول احتمال دوجمله‌ای باید چهار فرایند وجود داشته باشد.

آزمایشات ثابت: فرایند موردبررسی باید دارای تعداد ثابتی از آزمون‌ها باشد که در طول تجزیه‌وتحلیل قابل‌تغییر نباشند در جریان انالیز هر آزمون باید به روشی یکنواخت انجام شود اگرچه هرکدام ممکن است نتیجه متفاوتی داشته باشد.

آزمایش‌ها مستقل: شرط دیگر توزیع دوجمله‌ای این است که آزمایش‌ها مستقل از یکدیگر باشند. به زبان ساده، نتیجه یک آزمایش نباید بر نتیجه آزمایش‌ها بعدی تأثیر بگذارد.

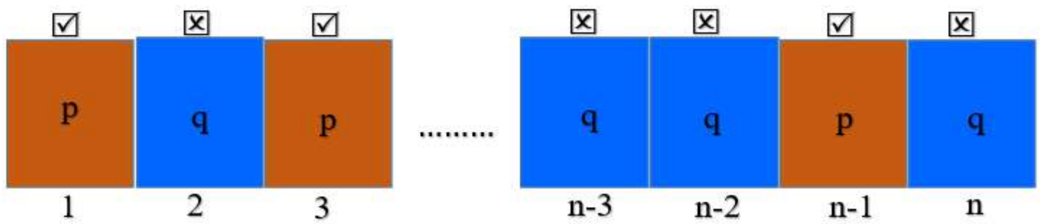
احتمال ثابت موفقیت: در یک توزیع دوجمله‌ای، احتمال موفقیت باید برای آزمایش‌های که در حال بررسی آن‌ها هستیم ثابت بماند. به‌عنوان‌مثال هنگام پرتاب یک سکه احتمال عوض شدن نتیجه برای هر آزمایشی که انجام می‌دهیم $\frac{1}{2}$ یا ۰,۵ است، زیرا تنها دو نتیجه ممکن وجود دارد.

دو نتیجه متقابل منحصربه‌فرد: در توزیع دوجمله‌ای تنها دو نتیجه متقابلاً منحصربه‌فرد وجود دارد. یعنی پیروزی یا شکست درحالی‌که موفقیت به‌طورکلی یک اصطلاح مثبت است، می‌توان از آن به این معنی استفاده کرد که نتیجه آزمایش با آنچه شما به‌عنوان موفقیت تعریف کرده‌اید، یکسان است، خواه نتیجه مثبت یا منفی باشد. (مشکانی, ۱۳۹۰)

۷-**توزیع برنولی:** اگر اتفاقی را در نظر بگیریم که تنها دو حالت دارد، درصورتی‌که احتمال رخداد یکی از حالت را p در نظر بگیریم، احتمال رخداد حالت مقابل برابر با q می‌شود یعنی $q = p - 1$ این تعریف آزمایش برنولی است و مثال کلاسیک آن پرتاب یک سکه است و در مقابل توزیع دوجمله‌ای به‌این‌ترتیب تعریف می‌شود اگر یک آزمایش برنولی را n بار تکرار کنیم به آن توزیع دوجمله‌ای می‌گوییم، مثلاً اگر یک سکه را چند بار پرتاب کنیم این یک توزیع دوجمله‌ای است، از توزیع دوجمله‌ای برای بررسی رویدادهایی استفاده می‌شود که هدف آن شمارش تعداد موفقیت‌ها باشد، به‌بیان‌دیگر اگر احتمال موفقیت در انجام کاری برابر p باشد و

این کار n بار انجام شود، می‌توان محاسبه کرد احتمال این‌که k بار موفقیت حاصل شود چقدر است. شکل زیر را در نظر بگیرید، فرض کنید n بار یک آزمایش برنولی را انجام دادیم. مواردی که با رنگ زرد هستند نشان‌دهنده‌ی موفقیت هستند و موارد برنگ آبی شکست‌ها را نشان می‌دهند. فرض کنید در شکل زیر k بار رنگ زرد آمده است می‌دانیم که احتمال زرد آمدن p و احتمال رنگ آبی q است. یعنی: $q = 1 - p$

-٦



(شکل۳): دراین‌جاه n بار یک آزمایش برنولی انجام شده، مواردی که با رنگ زرد هستند نشان دهنده‌ی P (موفقیت) و موارد که برنگ آبی هستند نشان دهنده‌ی q (شکست)

در این شکل فوق، k تا p داریم پس $n - k$ تا q خواهیم داشت، کافی است تمام حالت‌هایی که k بار حالت زرد بیاید شمرده شود، پس برای شمارش تعداد موفقیت‌ها. انتخاب k از n را به فرمول اضافه می‌کنیم. بنابراین احتمال متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای از این فرمول ذیل محاسبه می‌شود: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. (رنجبران, ۱۳۸۸)

۸- توزیع دوجمله‌ای و توزیع برنولی: یک سکه را به هوا پرتاب می‌کنیم یا شیر می‌آید یا خط اگر شیر بیاید پیروز می‌شویم (success) و اگر خط بیاید، می‌بازیم (fail) احتمالِ هرکدام هم 50% است این ساده‌ترین مثال از توزیع برنولی بود، در این توزیع که دو حالت دارد، با احتمال‌های مشخصی یا برنده می‌شویم یا می‌بازیم و مجموع احتمالاتِ برد و باخت هم برابر یک می‌شود، فرض کنید شخصی که دارای بیماریِ خاصی هست، سکته‌ی مغزی می‌کند و بر اساس داده‌ها و معلومات قبلی در بیمارستان، 20% از افرادِ بیماری که سکته‌ی مغزی کرده‌اند، فوت می‌کنند (fail) پس 80% از آن‌ها زنده مانده‌اند (success) این هم نوعی توزیع برنولی بود، با این تفاوت که احتمالات در این مثال برابر نبودند. اگر احتمال برنده شدن (در این مثال زنده ماندن) را برابر p در نظر بگیریم، پس $p = 0.8$ است و اگر احتمال